

## SERIE D'EXERCICES

## EXERCICE 1

- Soit ABCD un parallélogramme.
  - Construire E et F tels que  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$ .
  - Démontrer que les points C, E et F sont alignés.
- Soit ABC un triangle.
  - Construire les points D et E définis par :  
 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
  - Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

## EXERCICE 2

- Soit ABC un triangle.
- Construire le point M, tel que  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .
  - Démontrer que  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .
  - Construire N tel que  $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  en déduire que A, M et N sont alignés.

## EXERCICE 3

- Soient A, B et C trois points distincts du plan.
- Placer le point D tel que :  $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .
  - Placer le point E tel que :  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .
  - Montrer que ABEC est un parallélogramme.
  - Montrer que pour tout point M du plan on a :  
 $2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD}$ .
  - Montrer que  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ .

## EXERCICE 4

- OAB est un triangle, D et C les points tels que :
- $$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ et } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$
- Démontrer que O est le milieu de [CD].
  - E et F sont les points tels que :  $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$  et  $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ . Démontrer que ABFE est un parallélogramme.

## EXERCICE 5

- A, B, C et D sont quatre points.
- Construire les points E et F tels que  
 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
  - Montrer que  $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

## EXERCICE 6

ABCD est un parallélogramme, I et J les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

Soit G le point tels que :  $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$

Construire la figure et montrer que les points A, C, G sont alignés.

## EXERCICE 7

Dans un triangle ABC, on considère par M le milieu de [AB], par I celui de [MC] et K le point tel que

$$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

- Montrer que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$   
et  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .
- En déduire que les points A, I, K sont alignés.

## EXERCICE 8

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit. A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

- On considère le point H défini par :  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
- Montrer que  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$  ;  $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{BA'}$  et  $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$
- b) En déduire que : (AH)  $\perp$  (BC) et (BH)  $\perp$  (CA).  
Que représente alors le point H ?

### EXERCICE 9

ABCD est un parallélogramme.

- Définir vectoriellement et placer les points I, J et K définis par :  
 $I = \text{bar} \{(A, 5); (B, -2)\}$  ;  $J = \text{bar} \{(B, 1); (C, -2)\}$  ;  
 $K = \text{bar} \{(C, -5); (D, 2)\}$  et  $L = \text{bar} \{(D, -1); (A, 2)\}$ .
- Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

### EXERCICE 10

Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points pondérés (B, -1) et (C, 2) ; B' le barycentre de (A, 3) et (C, 2) et C' le barycentre de (A, 3) et (B, -1).

- Placer les points A', B' et C'.
- Soit G le barycentre de (A, 3), (B, -1) et (C, 2).
- Montrer que :  $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ .
- En déduire que G est un point de (AA').
- Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

### EXERCICE 11

Soit ABC un triangle quelconque.

$$G = \text{bar} \{(A, 3); (B, 3)\} ; E = \text{bar} \{(B, 3); (C, 1)\}$$

$$F = \text{bar} \{(A, 3); (C, 1)\} ; I = \text{bar} \{(A, 3); (B, 3); (C, 1)\}$$

- Démontrer que :

A, I et E sont alignés.

B, I et F sont alignés.

C, I et G sont alignés.

- Que peut-on en déduire pour les droites (AE), (BF) et (CG) ?

$$\text{Soit } E' = \text{bar} \{(B, 3); (C, -1)\}.$$

- Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{E'G}$  et  $\overrightarrow{GF}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
- En déduire que E', F et G sont alignés.
- Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

### EXERCICE 12

Soient A et B deux points tels que AB = 10cm.

- Construire le barycentre I de (A, 2) et (B, 3) et le barycentre J de (A, 3) et (B, 2).
- Déterminer l'ensemble des points M tels que :  
 $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$

### EXERCICE 13

Soient un triangle ABC rectangle en A et tels que AB = 4 cm et AC = 6 cm.

- Placer le point G tel que :  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ , calculer AG.
- Démontrer que  $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c)\}$  avec a, b et c des réels à déterminer.
- Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tel que :  
 $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 10$ .

Montrer que  $\Gamma$  passe par C et A.

### EXERCICE 14

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a = 4cm.

Soit D le point défini par :  $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

- Exprimer D comme barycentre de A, B et C affectes de coefficients à préciser.
- Soit I le milieu de  $\overrightarrow{AC}$ .  
a- Montrer que D est barycentre de B et I affectes de coefficients à préciser.  
b- En déduire que D est le symétrique de G par rapport à I (G étant le centre de gravité du triangle ABC).
- a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :  $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{3}$ .  
b- Démontrer que G appartient à (E) et construire (E).

### EXERCICE 15

Soient A, B et C trois points distincts ; a, b et c trois réels avec  $a + b + c \neq 0$  et  $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ .

- Démontrer que les points pondérés (A, 2a + 1), (B, 2b - 2) et (C, 2c + 1) admettent un barycentre qu'on appellera K.
- a) Donner une relation vectorielle définissant k et en déduire :  $a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}}{2}$

b) En déduire que G et K sont confondus si et seulement si B est le milieu du segment  $\overrightarrow{AC}$ .

**Courage pour toujours**

- Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles. SENEQUE
- La folie, c'est de faire toujours la même chose et de s'attendre à un résultat différent. ALBERT EINSTEIN
- L'énergie est contagieuse. Si tu veux voler avec les aigles, tu devras arrêter de nager avec les canards. T. HARVEKER
- Pour avoir quelque chose que tu n'as jamais eu. Tu dois faire quelque chose que tu n'as jamais fait